EXERCICE 3 – FONCTIONS, FONCTION LOGARITHME **7 points**

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)]$.

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. $g(\mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2\,(1 - 2\ln(\mathrm{e})) = 1 + \mathrm{e}^2\,(1-2) = 1 - \mathrm{e}^2$
   $\mathrm{e} > 2$ donc $\mathrm{e}^2 > 4$ donc $1 - \mathrm{e}^2 < 0$, et donc $g(\mathrm{e}) < 0$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 2\ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\,(1 - 2\ln(x)) = -\infty$.
   On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
3. **a.** Pour $x \in\ ]0\,;+\infty[$, on a :
   $g'(x) = 2x\,(1 - 2\ln(x)) + x^2\left(-\dfrac{2}{x}\right) = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x)$.

   b. Pour étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on détermine le signe de $g'(x)$ sur cet intervalle.

x	0		1		$+\infty$
$-4x$		$-$		$-$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x) = -4x\ln(x)$	‖	$+$	0	$-$	

   Donc la fonction g
   - est strictement croissante sur $]0\,;1[$;
   - est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$;
   - admet en $x = 1$ un maximum égal à $g(1) = 1 + 1^2\,(1 - \ln(1)) = 2$.

   c. On trace le tableau des variations de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

   D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$. On appelle α cette solution.

d. $\left.\begin{array}{l} g(1) = 2 > 0 \\ g(2) \approx -0,55 < 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [1\,;2]$

$\left.\begin{array}{lcl} g(1,8) & \approx & 0,43 > 0 \\ g(1.9) & \approx & -0,024 < 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [1,8\,;1,9]$

$\left.\begin{array}{lcl} g(1,89) & \approx & 0,024 > 0 \\ g(1.90) & \approx & -0,024 < 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [1,89\,;1,90]$

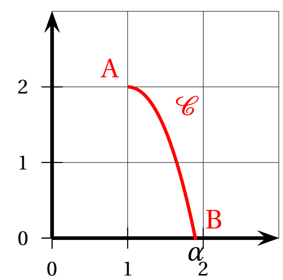
4. On en déduit le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x)+1]$.
Sur $[1\,;\,\alpha]$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $\ln(x)+1 > 0$ donc $-4\,(\ln(x)+1) < 0$.
On en déduit que $g''(x) > 0$ et donc que la fonction g est concave sur $[1\,;\,\alpha]$.

2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.



a. La droite (AB) a pour équation réduite :

$$\frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \iff \frac{y-2}{x-1} = \frac{0-2}{\alpha-1} \iff y = \frac{-2\,(x-1)}{\alpha-1}+2$$

$$\iff y = \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2}{\alpha-1} + \frac{2\alpha-2}{\alpha-1} \iff y = \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2\alpha}{\alpha-1}$$

b. Sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$, la fonction est concave, donc sa courbe représentative est située au dessus de toute sécante, donc au dessus du segment [AB].
On en déduit que sur $[1\,;\,\alpha]$, on a : $g(x) \geqslant \dfrac{-2}{\alpha-1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.